1. Μια λεπτή πλάκα πυκνότητας $\rho(x,y) = y + 1$ φράσσεται από τις καμπύλες $x = y^2$ και $x = 2y - y^2$.

   (α) Να βρείτε τη μάζα και τη ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα x. [1]

   (β) Αν η πλάκα έχει σταθερή πυκνότητα $\rho(x,y) = \rho_0$, να βρεθεί η τιμή ρ_0 ώστε η μάζα της να παραμένει ίση με τη τιμή του πρώτου ερωτήματος. [1]

2. (α) Έστω $\vec{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο δυνάμεων. Να δείξετε ότι για κάθε κλειστή διαδρομή $W = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ αν και μόνο αν το πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό. [1]

   (β) Θεωρείστε $\vec{F} = x_0\hat{\imath}+y_0\hat{\jmath}+z_0\hat{k}$ ένα πεδίο δυνάμεων με σταθερές συνιστώσες x_0, y_0, z_0. Να δείξετε ότι το έργο κατά μήκος μιας τυχαίας (οποιασδήποτε) διαδρομής από σημείο Α στο σημείο Β είναι $W = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{AB}}$. [1]

3. Να διατυπώσετε, με απόλυτη ακρίβεια, τα αξιώματα του Newton για τη θεμελίωση της Μηχανικής. [1]

4. Να δείξετε ότι οι τροχιές των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος είναι επίπεδες. [1]

5. Έστω το συναρτησοειδές: $J[x] = \displaystyle\int_a^b L(t,x,\dot{x})\,\mathrm{d}t$, όπου $x \in C^2[a,b]$ και $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\eta(t)$ τέτοια ώστε οι μεταβολές της συνάρτησης $x = x(t)$ να περιγράφονται ως: $x(\alpha,t) = x(0,t) + \alpha\,\eta(t)$.

   (α) Να δείξετε ότι το $J[x]$ παρουσιάζει ακρότατο όταν: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$ [1]

   (β) Αν η συνάρτηση L αντιστοιχεί στη συνάρτηση Lagrange ενός μονοδιάστατου συστήματος, να δείξετε ότι το αποτέλεσμά σας είναι ισοδύναμο με τη διατήρηση της ενέργειας. [1]

   (γ) Να δείξετε ότι αν $L(t,x,\dot{x},\ddot{x})$, όπου $x \in C^4[a,b]$ τότε το το $J[x]$ παρουσιάζει ακρότατο όταν: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0.$ [2]